Introducción a cuerpo rígido

Cinemática y tensor de inercia

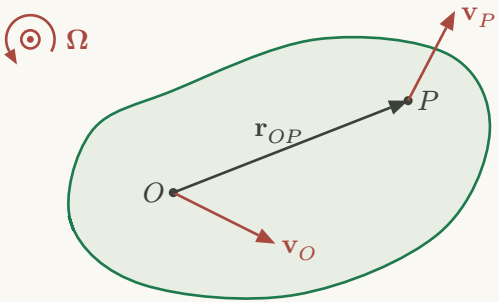
Mecánica Clásica — Universidad de Buenos Aires · 5 de octubre

Cinemática del rígido

El campo de velocidades

- $\boldsymbol{\Omega}$: velocidad angular del rígido.
- O: origen de una terna fija al cuerpo.
- $\mathbf{v}_O$: velocidad de O.
- P: un punto cualquiera del rígido.
- $|\mathbf{r}_{OP}| = \text{cte}$, porque el cuerpo es rígido.
- $\mathbf{v}_P$: velocidad de P.

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{OP}$$



La velocidad angular

1.a | La velocidad angular Ω no depende de O

Con O' otro punto del cuerpo, escribimos $\mathbf{r}_{OP} = \mathbf{r}_{OO'} + \mathbf{r}_{O'P}$:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{OP} = \underbrace{\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{OO'}}_{\mathbf{v}_{O'}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{O'P} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{O'P}$$

Escribiendo $\mathbf{v}_P$ directamente desde una terna en O':

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{O'P}$$

Restando:

$$(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}') \times \mathbf{r}_{O'P} = 0 \quad \forall P \text{ del cuerpo} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}'$$

(si el cuerpo no está sobre una recta)

Un invariante

1.b | Si en un instante un punto del rígido se mueve perpendicular a Ω, todo el rígido lo hace

Proyectando $\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{OO'}$ sobre $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{v}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} + \underbrace{(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{OO'}) \cdot \boldsymbol{\Omega}}_{0} = \mathbf{v}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

Todos los puntos del rígido tienen la misma componente paralela a $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$:

$$\mathbf{v}_O = v_{\parallel}\, \hat{\boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{v}_{O\perp}$$

Si $\mathbf{v}_O \perp \boldsymbol{\Omega}$ para un punto O, entonces $\mathbf{v}_{O'} \perp \boldsymbol{\Omega}$ para todo O'.

El eje instantáneo de rotación

1.c y 1.d | Si las velocidades son perpendiculares a Ω, existe un eje instantáneo de rotación

Si $\mathbf{v}_O \perp \mathbf{\Omega}$, vale $\mathbf{v}_{O'} \perp \mathbf{\Omega}$ para todo O', y siempre puede elegirse $\mathbf{r}_{OO'}$ tal que

$$\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_O + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{OO'} = 0.$$

Un punto P de la recta paralela a $\mathbf{\Omega}$ que pasa por O' cumple $\mathbf{r}_{O'P} = \lambda \mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{O'P} = \mathbf{v}_{O'} + \lambda\, \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} = 0$$

Toda la recta tiene velocidad nula: es el **eje instantáneo de rotación**.

El tornillo

1.i y 1.j | Si $\mathbf{v}_O$ no es perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}$, ningún punto está quieto

Si para algún punto O la velocidad $\mathbf{v}_O$ no es perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}$, todos los puntos del rígido comparten la misma $v_\parallel \neq 0$:

$$\mathbf{v}_O = v_\parallel \, \hat{\boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{v}_{O\perp}, \quad v_\parallel \neq 0$$

Por lo que en este caso **ningún** punto del rígido está quieto.

Energía cinética

Energía cinética de un rígido

Con $\mathbf{r}_i$ la posición de la partícula i medida desde O:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i$$

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{m_i}{2} |\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i|^2 \\ &= \frac{M}{2} v_O^2 + \mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}_{M\mathbf{R}^O}) + \sum_i \frac{m_i}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i|^2 \end{aligned}$$

$\mathbf{R}^O$: posición del centro de masa medida desde O.

El término de rotación

De alguna identidad del producto vectorial:

$$|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i|^2 = \Omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2$$

Con componentes $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) = \big(x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}\big)$:

$$|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i|^2 = \sum_{j,k} \Omega_j \Omega_k \big(r_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k}\big)$$

De acá sale el tensor de inercia $\mathbb{I}_O$.

El tensor de inercia

$$T = \underbrace{\frac{M}{2} v_O^2}_{\text{traslación}} + \underbrace{\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{\Omega}}_{\text{rotación}} + \underbrace{M \mathbf{v}_O \cdot \left(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}^O\right)}_{\text{término cruzado}}$$

$$\left[\mathbb{I}_O\right]_{jk} = I_{jk}^O = \sum_i m_i \left(r_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k}\right)$$

o, en el continuo,

$$I_{jk}^O = \int \left(r^2 \delta_{jk} - x_j x_k\right) \mathrm{d}m, \quad \mathrm{d}m = \rho \, \mathrm{d}V, \quad \sigma \, \mathrm{d}A \quad \text{o} \quad \lambda \, \mathrm{d}l$$

Por ejemplo, $I_{xy}^O = -\int \rho(x, y, z)\, xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$.

Ejes principales de inercia

En los ejes principales de inercia, donde $\mathbb{I}_O$ es diagonal:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2)$$

Los momentos principales cumplen:

- Cuerpo plano: $I_3 = I_1 + I_2$.
- Cualquier cuerpo: $I_1 + I_2 \geq I_3$.
- Si $I_1 = I_2 = I_3$, cualquier terna es principal.

¿Cuándo se simplifica T?

- O es el centro de masa: $\mathbf{R}^O = 0$, y

$$T = \frac{M}{2} v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbb{I}_{\text{cm}} \boldsymbol{\Omega}$$

- O tiene velocidad nula, como en la rodadura o con un punto fijo: $\mathbf{v}_O = 0$, y

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{\Omega}$$

Teorema de Steiner

Teorema de Steiner

Con $\mathbf{r}'_i$ medido desde el centro de masa, $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}^O + \mathbf{r}'_i$ y $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$.

Reemplazando en la definición del tensor:

$$I^O_{jk} = \sum_i m_i \left(r_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k} \right)$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i \left(r_i'^2 \delta_{jk} - x'_{i,j} x'_{i,k} \right)}_{I^{\mathrm{cm}}_{jk}} + M\left(\left(R^O\right)^2 \delta_{jk} - R^O_j R^O_k \right)$$

$$\boxed{I^O_{jk} = I^{\mathrm{cm}}_{jk} + M\left(\left(R^O\right)^2 \delta_{jk} - R^O_j R^O_k \right)}$$

TEOREMA DE STEINER

Steiner con un desplazamiento en una dirección

Si O está desplazado del centro de masa en una sola dirección, por ejemplo $\mathbf{R}^O = d\,\hat{\mathbf{z}}$:

$$I^O_{xx} = I^{\mathrm{cm}}_{xx} + Md^2, \quad I^O_{yy} = I^{\mathrm{cm}}_{yy} + Md^2, \quad I^O_{zz} = I^{\mathrm{cm}}_{zz}$$

$$I^O_{jk} = I^{\mathrm{cm}}_{jk} \quad (j \neq k)$$

Para un eje con dirección $\hat{\mathbf{n}}$ perpendicular al desplazamiento:

$$\boxed{I^O_n = I^{\mathrm{cm}}_n + Md^2}$$