Hola

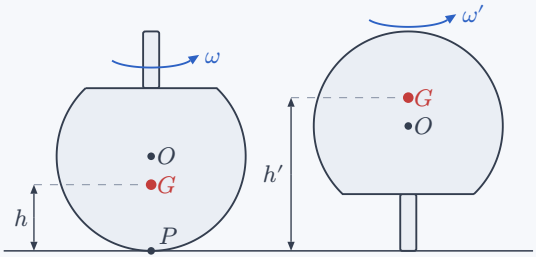
Un trompo particular

Imaginemos un trompo así: una esfera con un cabito, con el centro de masa G un poco debajo del centro O.

Comparemos dos formas de hacerlo girar: apoyado en la esfera, o dado vuelta sobre el cabito.

Dado vuelta, G está más alto ($h' > h$) y tiene más energía potencial.

¿Cuál tiene menos energía en total?



Un trompo particular

Para ver esto, calculemos la energía cinética. Con el eje vertical, $T = I_3\omega_3^2/2 = L^2/2I_3$.

Pero $\mathbf{L}$ no se conserva, porque el rozamiento en P hace torque.

Ese torque es perpendicular a $\mathbf{r}_{GP}$, y con eso se puede mostrar que sí se conserva

$$J = \mathbf{L} \cdot \mathbf{r}_{GP}$$

Con el eje vertical $|J| = Lh$, y la energía depende sólo de la altura de G:

$$E = \frac{J^2}{2I_3h^2} + mgh$$

Si gira rápido (J grande), domina el primer término, que es más chico para h más grande.

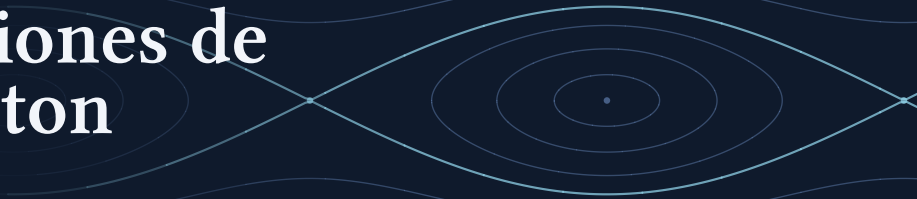
Como el rozamiento disipa energía sin cambiar J, **el trompo se da vuelta solo**.



Wolfgang Pauli y Niels Bohr mirando un tippe top (Lund, 1951).

Formalismo hamiltoniano

Ecuaciones de Hamilton



Mecánica Clásica — Universidad de Buenos Aires · 19 de octubre

El hamiltoniano

Hasta ahora conocen

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}, \quad p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

como la cantidad que se conserva cuando $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de t.

En el formalismo de Hamilton, H toma el rol central. Lo escribimos **en función de las coordenadas y sus momentos conjugados**, despejando $\dot{q}_k(q, p, t)$:

$$H(q, p, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

El diferencial de H

Diferenciamos $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$ y usamos la definición de p_k y las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \sum_k \left(\dot{q}_k \,\mathrm{d}p_k + \underbrace{p_k \,\mathrm{d}\dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\,\mathrm{d}\dot{q}_k}_{0} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}}_{\dot{p}_k}\,\mathrm{d}q_k \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_k (\dot{q}_k \,\mathrm{d}p_k - \dot{p}_k \,\mathrm{d}q_k) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

El cambio de variables de $(q, \dot{q})$ a (q, p) es una transformada de Legendre.

Las ecuaciones de Hamilton

$$\mathrm{d}H = \sum_k (\dot{q}_k \,\mathrm{d}p_k - \dot{p}_k \,\mathrm{d}q_k) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}H = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\,\mathrm{d}p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\,\mathrm{d}q_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

Como $\mathrm{d}q_k$, $\mathrm{d}p_k$ y $\mathrm{d}t$ son independientes, igualamos los coeficientes:

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Son dos ecuaciones de primer orden por grado de libertad, en lugar de una de segundo orden.

Pasos para obtener el hamiltoniano

1. Escribir $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$.
2. Calcular $p_k = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_k$ y despejar $\dot{q}_k(q, p, t)$.
3. Armar $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$, escrito **sólo** en función de (q, p, t).
4. Escribir las ecuaciones de Hamilton.

Partícula en una dimensión

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$$

$$p = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$H = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{p^2}{2m} - V \right) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

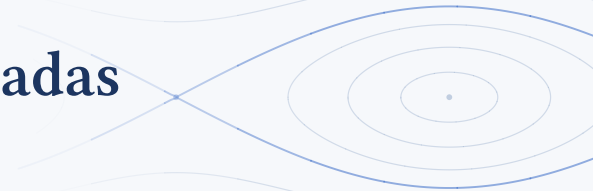
$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -V'(x)$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -V'(x)$$

Ventajas frente a Lagrange

- Permiten cambios de variables que mezclan coordenadas y momentos (transformaciones canónicas). Muy bueno. Los vemos la clase que viene.
- Hay métodos numéricos que respetan la estructura de las ecuaciones de Hamilton (integradores simplécticos). En integraciones largas, como las de órbitas planetarias, el error en la energía queda acotado.
- Es el formalismo que se usa en mecánica cuántica (conmutadores) y en mecánica estadística (teorema de Liouville).

Cantidades conservadas



Coordenadas cíclicas

Si q_j no aparece en H, la ecuación de Hamilton para p_j da

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \alpha = \text{cte}$$

Entonces α entra en H como un parámetro y quedan $n-1$ grados de libertad.

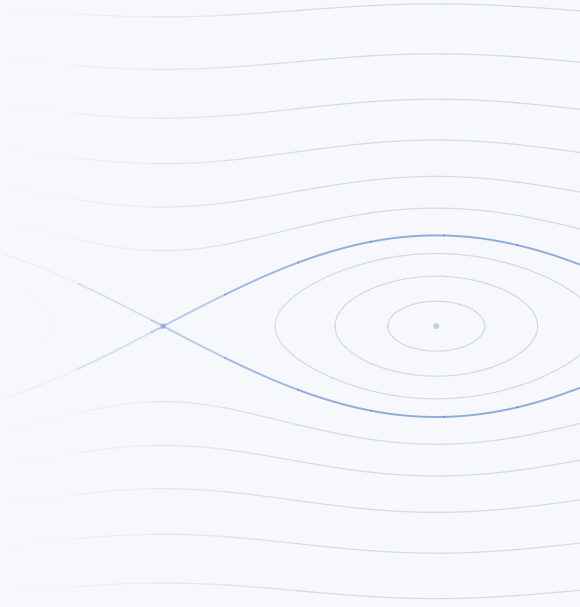
Por ejemplo, en un potencial central y en polares, φ es cíclica y directamente

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r)$$

En Lagrange también se conserva p_j, pero $\mathcal{L}$ sigue dependiendo de $\dot{q}_j$, que no es constante.

Porque como bien saben, no se pueden reemplazar conservaciones en $\mathcal{L}$.

Espacio de fases



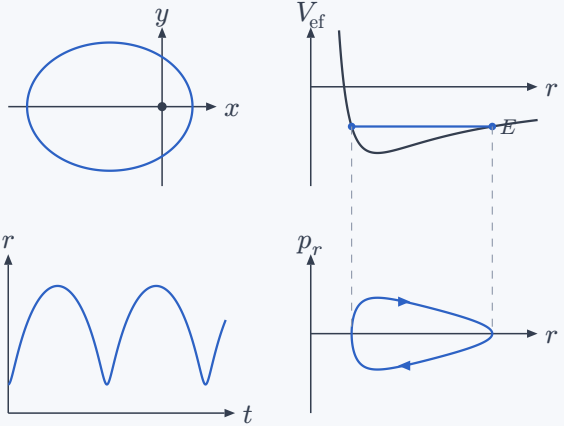
El hamiltoniano y el espacio de fases

Usemos de ejemplo las órbitas de Kepler:

- la **órbita** en el plano, y vs x (o r vs φ);
- la **evolución temporal**, $r(t)$;
- el **potencial efectivo**, a energía fija.

Las ecuaciones de Hamilton sugieren otra forma natural: p_r vs r.

Acá, por ejemplo, los puntos de retorno son donde la curva corta $p_r = 0$.



El espacio de fases

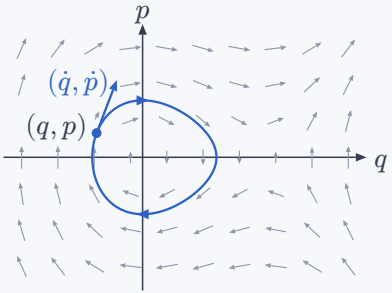
En cada instante, el estado es un punto (q, p).

Las ecuaciones de Hamilton le asignan una velocidad,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

y lo mismo hacen en cada punto del plano.

Siguiendo las flechas desde (q, p) se obtiene toda la evolución: una curva en el **espacio de fases**.

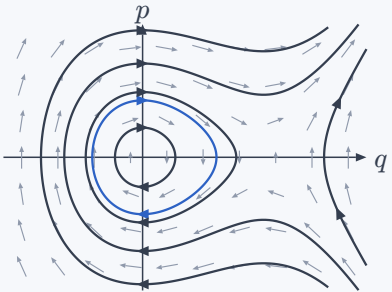


$H = p^2/2 + q^2/2 - q^3/3$

Las trayectorias no se cortan

Si H no depende explícitamente de t, el campo no cambia: por cada punto pasa una única flecha.
Entonces dos trayectorias distintas no pueden pasar por el mismo (q, p).
Hay una curva por cada CI, y estas curvas no se cortan.

El espacio de fases es muy útil porque hay muchos teoremas que restringen cómo pueden ser estas curvas: este es el primero.



$H = p^2/2 + q^2/2 - q^3/3$

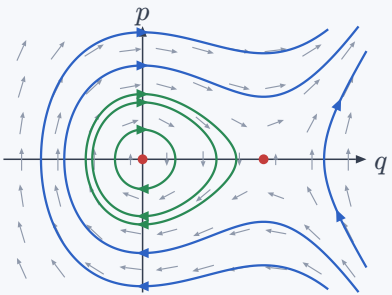
Tipos de movimiento

Espacio de fases

La forma de cada curva dice qué tipo de movimiento es:

- Una **curva cerrada** es un movimiento periódico: q y p se repiten después de un tiempo.
- Un **punto fijo**, donde $\dot{q} = \dot{p} = 0$, es un equilibrio.
- Una **curva abierta** es un movimiento no acotado en q.

Si además hay un solo grado de libertad, la energía se conserva y las curvas son las curvas de nivel de $H(q, p)$.



$H = p^2/2 + q^2/2 - q^3/3$

El oscilador armónico

$$H = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{k}{2}q^2 \Longrightarrow H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

Despejando p de $H = E$ salen dos ramas:

$$p = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$$

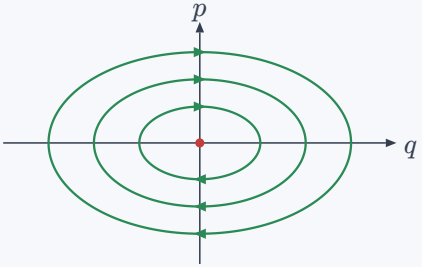
$$p = -\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$$

Como $\dot{q} = p/m$, se recorren en sentido horario.

Como esto vale para todo (q, p)

$\Rightarrow$ todas las curvas son cerradas

$\Rightarrow$ todo movimiento es periódico.



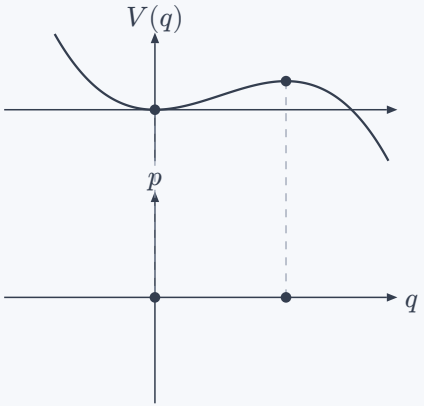
Puntos fijos en el espacio de fases

Un **punto fijo** es un punto del espacio de fases donde ni q ni p cambian: $\dot{q} = \dot{p} = 0$.
Si el sistema empieza ahí, se queda ahí para siempre: es un **equilibrio**.

Para $H = p^2/2m + V(q)$, eso es

$$\dot{q} = \frac{p}{m} = 0, \quad \dot{p} = -V'(q) = 0$$

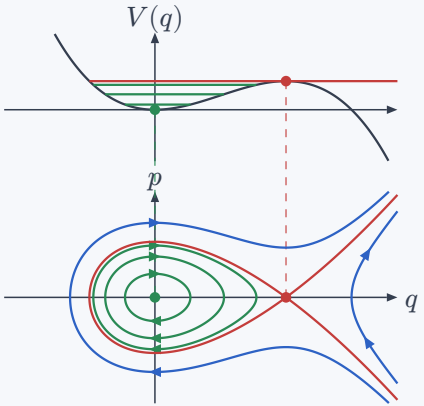
O sea, $p = 0$ y $V'(q) = 0$: los puntos fijos están sobre el eje q, "debajo" de los extremos de V.



Puntos fijos en el espacio de fases

- Cerca de un **mínimo** de V el sistema oscila, y el punto fijo queda rodeado de curvas cerradas. Es un **centro**, estable.
- Cerca de un **máximo**, las curvas se acercan al punto fijo y después se alejan. Es un **punto silla**, inestable.

Las curvas que pasan por los puntos silla se las llama **separatrices**, porque separan dos tipos de movimiento del sistema.

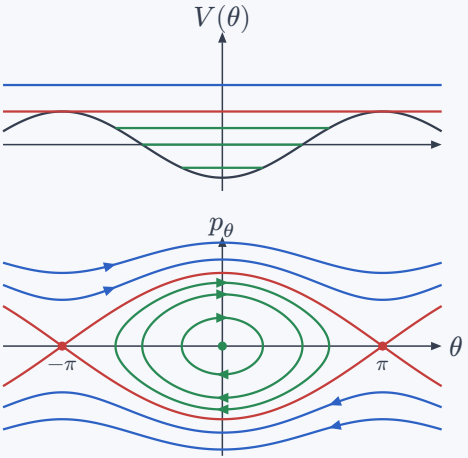


Ejemplo canónico: el péndulo

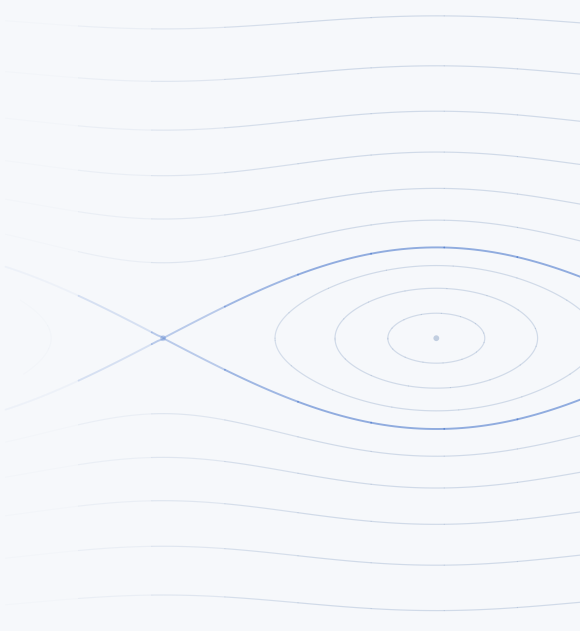
$$H = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell\cos\theta$$

- Con $E < mg\ell$ el péndulo oscila (**libración**) alrededor del centro ($\theta = 0$).
- Con $E = mg\ell$ la curva es la **separatriz**, que pasa por los puntos silla en $\theta = \pm\pi$.
- Con $E > mg\ell$ el péndulo da vueltas (**rotación**) y θ crece sin parar.

Espacio de fases



Potencial central



El hamiltoniano

Partícula en un potencial central $V(r)$.

L se conserva y el movimiento es plano. En polares φ es cíclica, $p_\varphi = L_z$, y

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \underbrace{\frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r)}_{V_{\text{ef}}(r)}$$

Queda un grado de libertad, y las curvas en (r, p_r) son

$$p_r = \pm\sqrt{2m(E - V_{\text{ef}}(r))}$$

Para Kepler, $V = -k/r$, y V_{ef} tiene un mínimo $E_{\text{mín}} = -mk^2/2L_z^2$ en $r_0 = L_z^2/mk$.

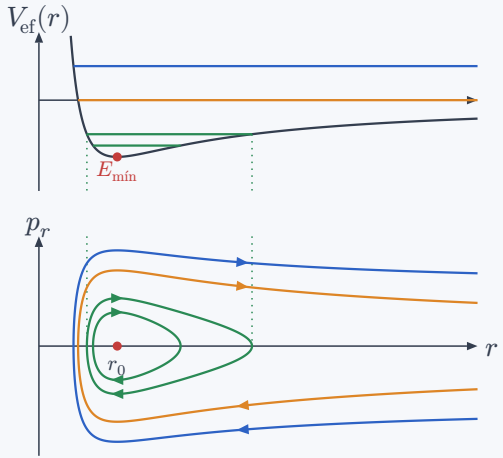
El diagrama de fases de Kepler

- Órbita **circular**: $E = E_{\text{mín}}$, un punto fijo.
- Órbita **elíptica**: $E_{\text{mín}} < E < 0$, curva cerrada.
- Órbita **parabólica**: $E = 0$, curva abierta.
- Órbita **hiperbólica**: $E > 0$, curva abierta.

La parabólica actúa de separatriz:

tiene un punto silla en $r = \infty$.

Que $r(t)$ sea periódico no implica que la órbita en el plano se cierre.



Eso es todo