Fuerzas centrales

Dispersión (Scattering)

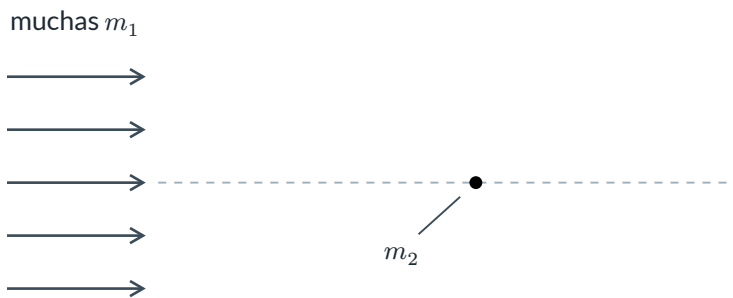
Mecánica Clásica · 9 de Septiembre

El experimento

Queremos entender el potencial $V(r)$ entre dos partículas haciendo el siguiente expeirmento:

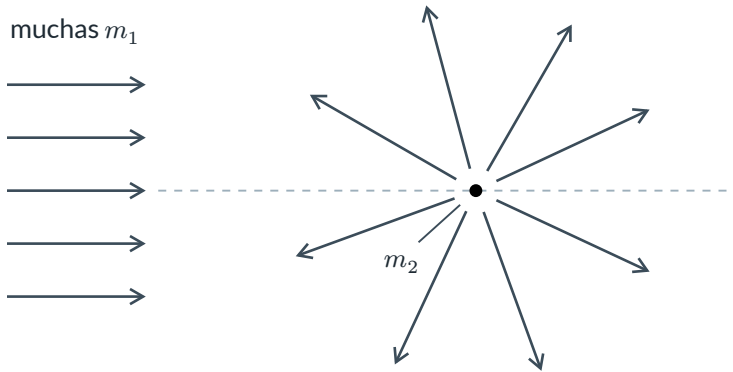
El experimento

Queremos entender el potencial $V(r)$ entre dos partículas haciendo el siguiente expeirmento:



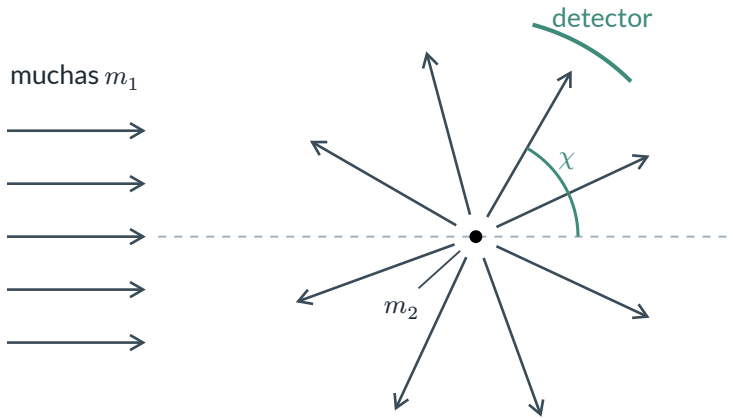
El experimento

Queremos entender el potencial $V(r)$ entre dos partículas haciendo el siguiente expeirmento:



El experimento

Queremos entender el potencial $V(r)$ entre dos partículas haciendo el siguiente expeirmento:



Las dos partes del problema

La cuenta medio se hace en dos pasos:

- **Mecánica.** Si una partícula viene del infinito con altura s, ¿cuánto se desvía?

Las dos partes del problema

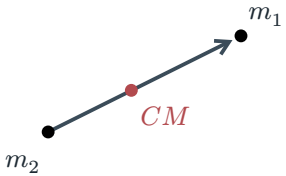
La cuenta medio se hace en dos pasos:

- **Mecánica.** Si una partícula viene del infinito con altura s, ¿cuánto se desvía?
- **Estadística.** Si llegan muchas partículas con distintas alturas s, ¿qué distribución de partículas se mide en el detector?

Repaso de fuerzas centrales

Repaso de fuerzas centrales

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$



dos cuerpos

Repaso de fuerzas centrales

$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$

$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$



dos cuerpos

una partícula en un centro fijo

$$L = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 - V(r)$$

Repaso de fuerzas centrales

$$\mu r^2 \dot{\varphi} = L_z, \qquad E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r), \qquad V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{L_z^2}{2\mu r^2}$$

Repaso de fuerzas centrales

$$\mu r^2 \dot{\varphi} = L_z, \qquad E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r), \qquad V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{L_z^2}{2\mu r^2}$$

Eliminando el tiempo queda la forma de la trayectoria:

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{L_z^2}[E - V(r)] - \frac{1}{r^2}}}$$

Repaso de fuerzas centrales

$$\mu r^2 \dot{\varphi} = L_z, \qquad E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r), \qquad V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{L_z^2}{2\mu r^2}$$

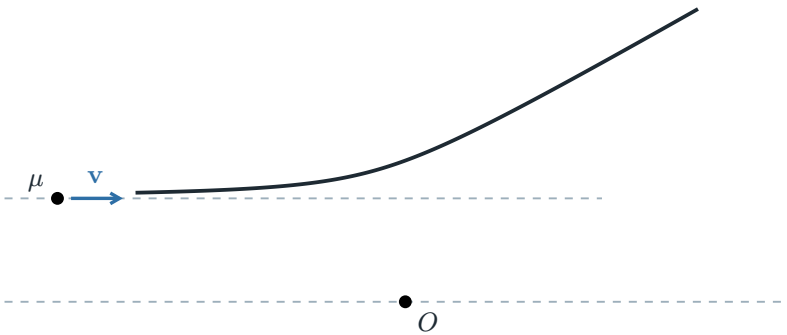
Eliminando el tiempo queda la forma de la trayectoria:

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{L_z^2}[E - V(r)] - \frac{1}{r^2}}}$$

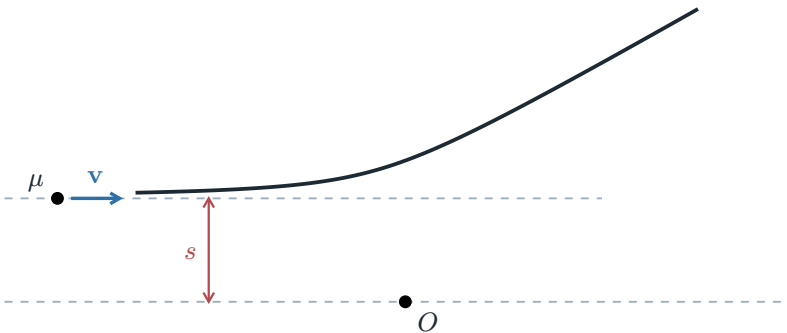
Notar que el signo cambia donde $\dot{r} = 0$: la trayectoria es **simétrica** respecto del punto de máximo acercamiento al CM (ahora O).

Parámetro de impacto s

Parámetro de impacto s

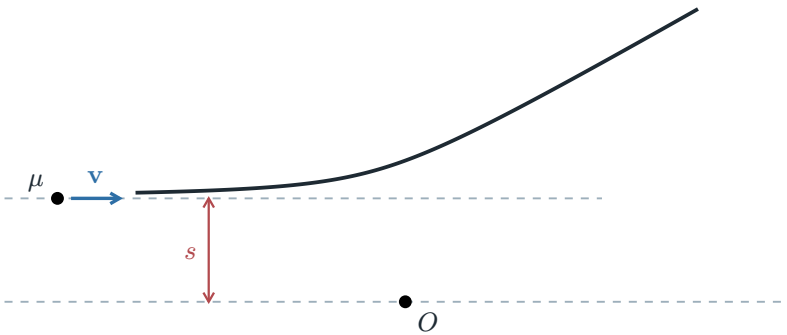


Parámetro de impacto s



El parámetro s es a qué distancia del centro pasaría la partícula si no hubiera interacción.

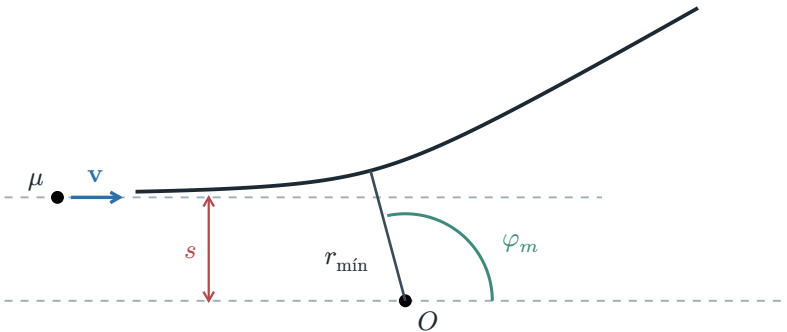
Parámetro de impacto s



El parámetro s es a qué distancia del centro pasaría la partícula si no hubiera interacción.

De condiciones iniciales: $|L_z| = \mu|\mathbf{v}|s, \qquad E = \frac{1}{2}\mu|\mathbf{v}|^2$

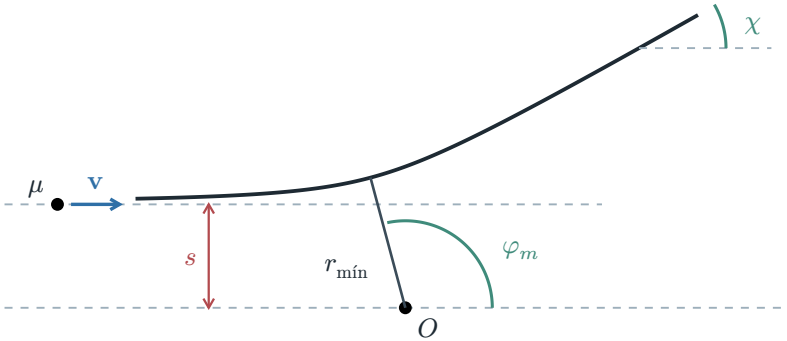
Parámetro de impacto s



El parámetro s es a qué distancia del centro pasaría la partícula si no hubiera interacción.

De condiciones iniciales: $|L_z| = \mu|\mathbf{v}|s, \qquad E = \frac{1}{2}\mu|\mathbf{v}|^2$

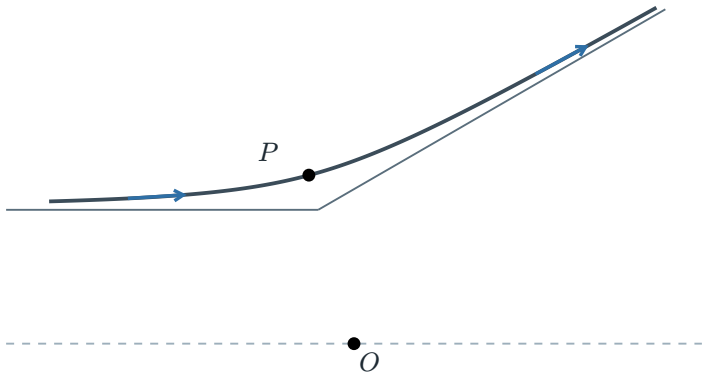
Parámetro de impacto s



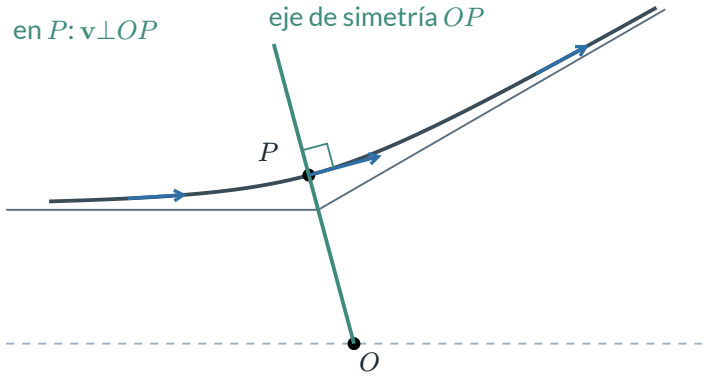
El parámetro s es a qué distancia del centro pasaría la partícula si no hubiera interacción.

De condiciones iniciales: $|L_z| = \mu|\mathbf{v}|s, \qquad E = \frac{1}{2}\mu|\mathbf{v}|^2$

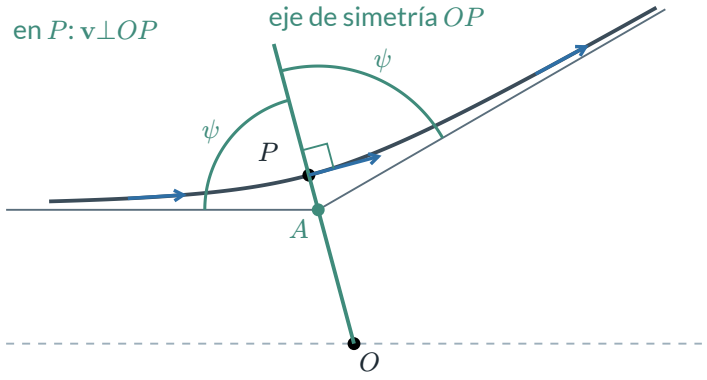
Relación entre φ_m y χ



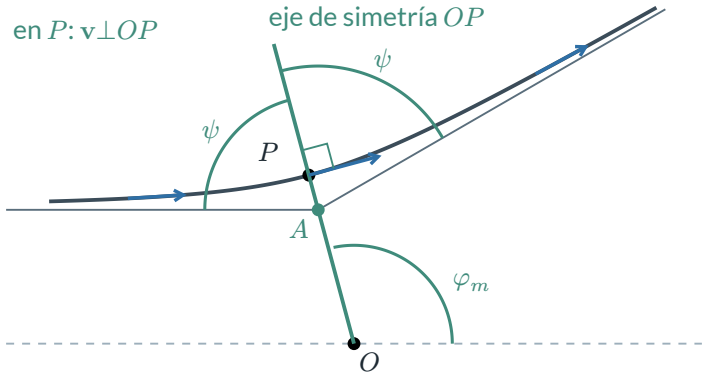
Relación entre φ_m y χ



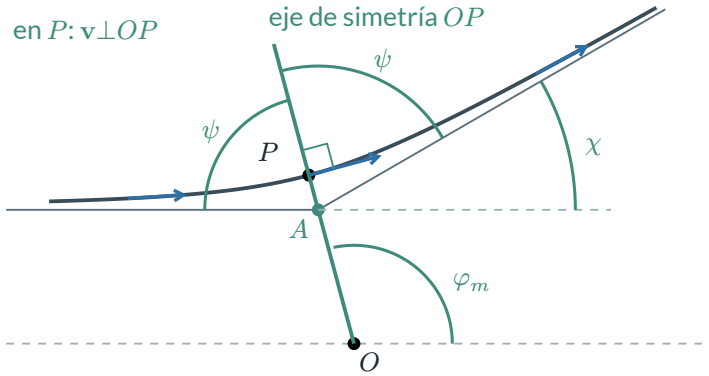
Relación entre φ_m y χ



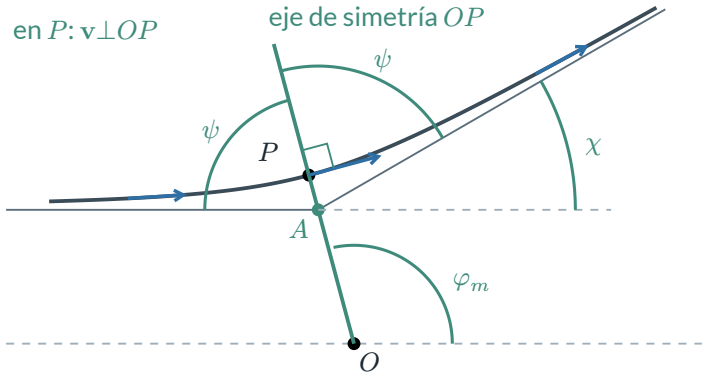
Relación entre φ_m y χ



Relación entre φ_m y χ

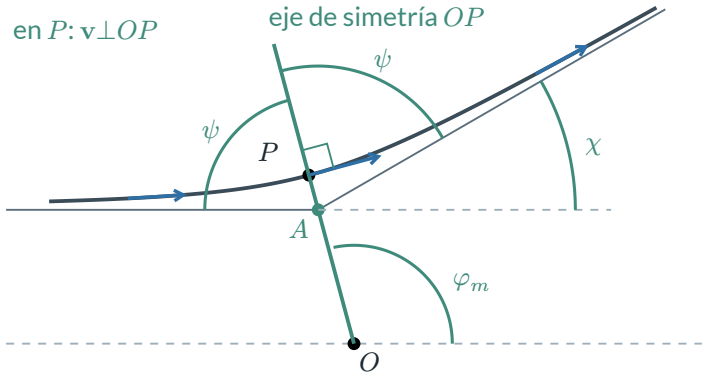


Relación entre φ_m y χ



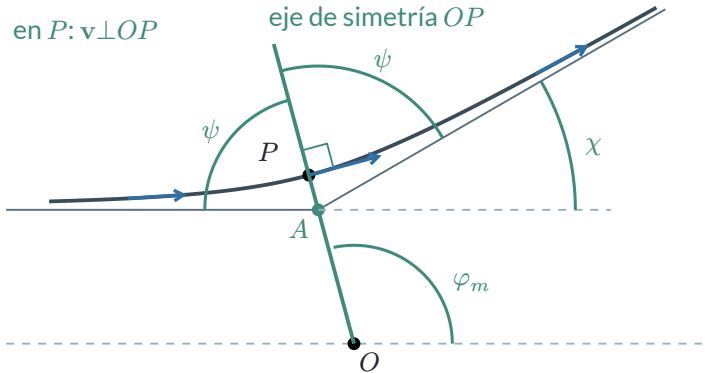
$$\varphi_m + \psi = \pi$$

Relación entre φ_m y χ



$$\varphi_m + \psi = \pi, \quad \psi = \varphi_m - \chi$$

Relación entre φ_m y χ



$$\varphi_m + \psi = \pi, \quad \psi = \varphi_m - \chi \qquad \Longrightarrow \qquad \chi = 2\varphi_m - \pi$$

El ángulo de dispersión

$$\chi = 2\varphi_m - \pi, \qquad \varphi_m = \pi + \int_{\infty}^{r_{\text{mín}}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{L_z^2}[E - V(r)] - \frac{1}{r^2}}}$$

El ángulo de dispersión

$$\chi = 2\varphi_m - \pi, \qquad \varphi_m = \pi + \int_{\infty}^{r_{\text{mín}}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{L_z^2}[E - V(r)] - \frac{1}{r^2}}}$$

Usando que $|L_z| = \mu|\mathbf{v}|s$ y $E = 1/2\mu|\mathbf{v}|^2$ tenemos $2\mu E/L_z^2 = 1/s^2$

El ángulo de dispersión

$$\chi = 2\varphi_m - \pi, \qquad \varphi_m = \pi + \int_{\infty}^{r_{\text{mín}}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{L_z^2}[E - V(r)] - \frac{1}{r^2}}}$$

Usando que $|L_z| = \mu|\mathbf{v}|s$ y $E = 1/2\mu|\mathbf{v}|^2$ tenemos $2\mu E/L_z^2 = 1/s^2$ y por lo tanto:

$$\chi(s) = \pi - 2\int_{r_{\text{mín}}}^{\infty} \frac{s\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{s^2}{r^2}}}$$

El ángulo de dispersión

$$\chi = 2\varphi_m - \pi, \qquad \varphi_m = \pi + \int_{\infty}^{r_{\text{mín}}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{L_z^2}[E - V(r)] - \frac{1}{r^2}}}$$

Usando que $|L_z| = \mu|\mathbf{v}|s$ y $E = 1/2\mu|\mathbf{v}|^2$ tenemos $2\mu E/L_z^2 = 1/s^2$ y por lo tanto:

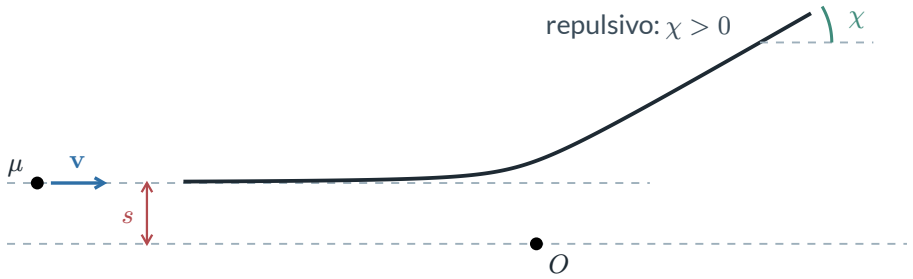
$$\chi(s) = \pi - 2\int_{r_{\text{mín}}}^{\infty} \frac{s\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{s^2}{r^2}}}$$

Con esto la parte mecánica está lista: a cada s le corresponde un χ.

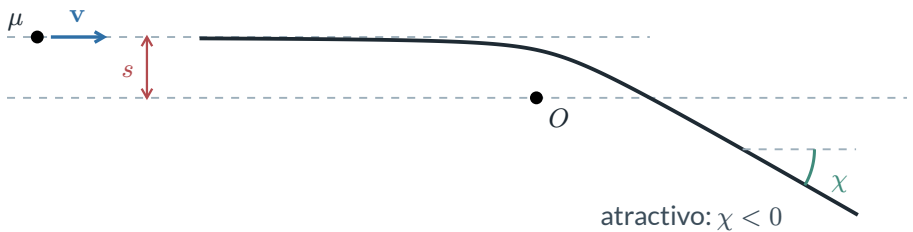
Un comentario: el signo de χ



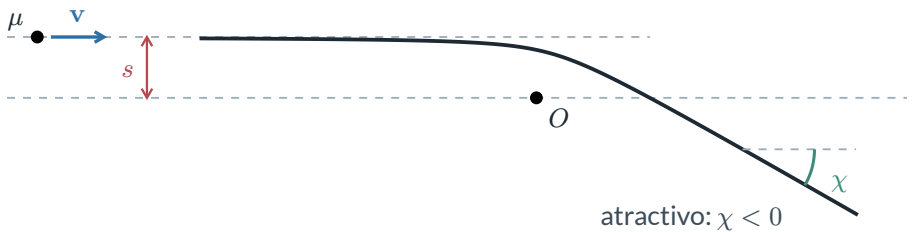
Un comentario: el signo de χ



Un comentario: el signo de χ



Un comentario: el signo de χ

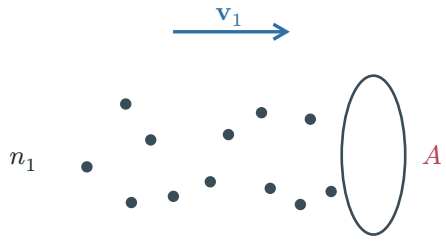


Con la misma s y el mismo $|\mathbf{v}|$, el signo de χ separa repulsión de atracción.

Intensidad del haz

Intensidad del haz

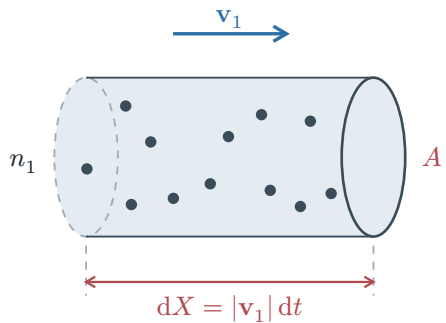
El haz tiene n_1 partículas por unidad de volumen, todas con velocidad $\mathbf{v}_1$.



Intensidad del haz

El haz tiene n_1 partículas por unidad de volumen, todas con velocidad $\mathbf{v}_1$.

En un tiempo $\mathrm{d}t$ cruzan la ventana de área A las que están en el cilindro de largo $\mathrm{d}X = |\mathbf{v}_1|\,\mathrm{d}t$

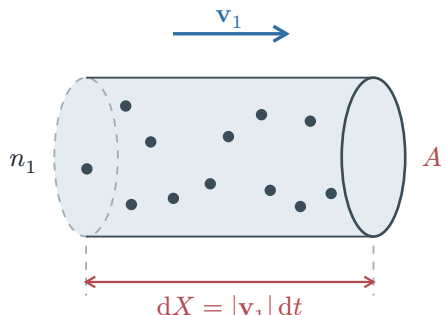


Intensidad del haz

El haz tiene n_1 partículas por unidad de volumen, todas con velocidad $\mathbf{v}_1$.

En un tiempo $\mathrm{d}t$ cruzan la ventana de área A las que están en el cilindro de largo $\mathrm{d}X = |\mathbf{v}_1|\,\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}N = n_1 A\,\mathrm{d}X = n_1 A|\mathbf{v}_1|\,\mathrm{d}t$$



Intensidad del haz

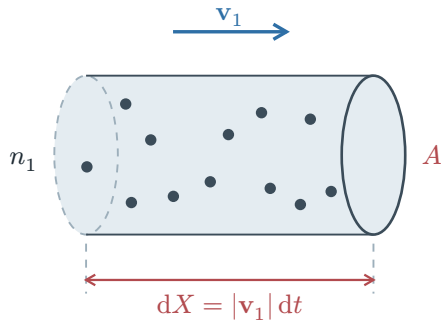
El haz tiene n_1 partículas por unidad de volumen, todas con velocidad $\mathbf{v}_1$.

En un tiempo $\mathrm{d}t$ cruzan la ventana de área A las que están en el cilindro de largo $\mathrm{d}X = |\mathbf{v}_1|\,\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}N = n_1 A\,\mathrm{d}X = n_1 A|\mathbf{v}_1|\,\mathrm{d}t$$

La intensidad son las partículas que pasan por unidad de área y de tiempo:

$$I_1 = \frac{\mathrm{d}N}{A\,\mathrm{d}t}$$



Intensidad del haz

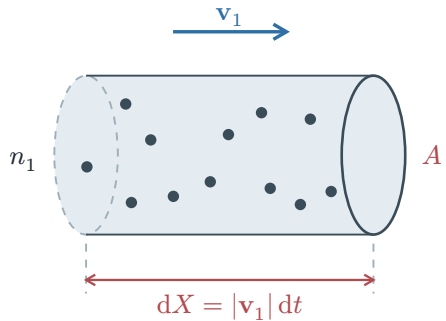
El haz tiene n_1 partículas por unidad de volumen, todas con velocidad $\mathbf{v}_1$.

En un tiempo $\mathrm{d}t$ cruzan la ventana de área A las que están en el cilindro de largo $\mathrm{d}X = |\mathbf{v}_1|\,\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}N = n_1 A\,\mathrm{d}X = n_1 A|\mathbf{v}_1|\,\mathrm{d}t$$

La intensidad son las partículas que pasan por unidad de área y de tiempo:

$$I_1 = \frac{\mathrm{d}N}{A\,\mathrm{d}t} = n_1|\mathbf{v}_1|$$



Sección eficaz

Llamamos $\mathrm{d}n_\chi$ a las partículas que salen por segundo con ángulos entre χ y $\chi + \mathrm{d}\chi$.

Sección eficaz

Llamamos $\mathrm{d}n_\chi$ a las partículas que salen por segundo con ángulos entre χ y $\chi + \mathrm{d}\chi$.

Esa cuenta es proporcional al intervalo angular y a la intensidad del haz, y el coeficiente de proporcionalidad se llama **sección eficaz** $\sigma(\chi)$:

$$\mathrm{d}n_\chi = \sigma(\chi) I_1 \, \mathrm{d}\chi$$

Sección eficaz

Llamamos $\mathrm{d}n_\chi$ a las partículas que salen por segundo con ángulos entre χ y $\chi + \mathrm{d}\chi$.

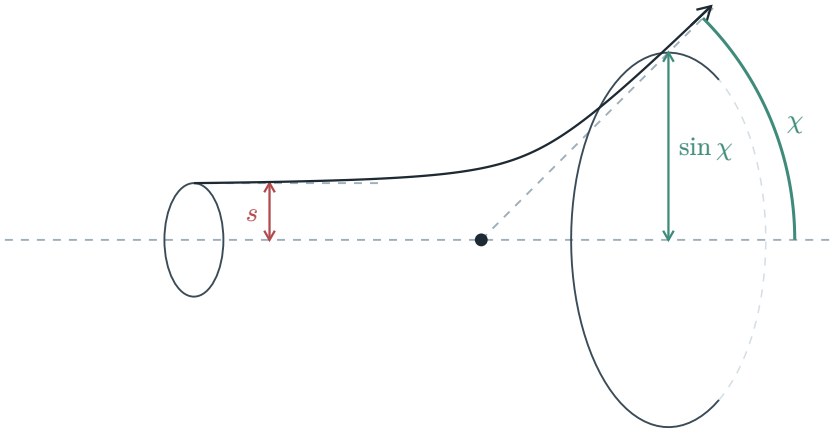
Esa cuenta es proporcional al intervalo angular y a la intensidad del haz, y el coeficiente de proporcionalidad se llama **sección eficaz** $\sigma(\chi)$:

$$\mathrm{d}n_\chi = \sigma(\chi) I_1 \, \mathrm{d}\chi$$

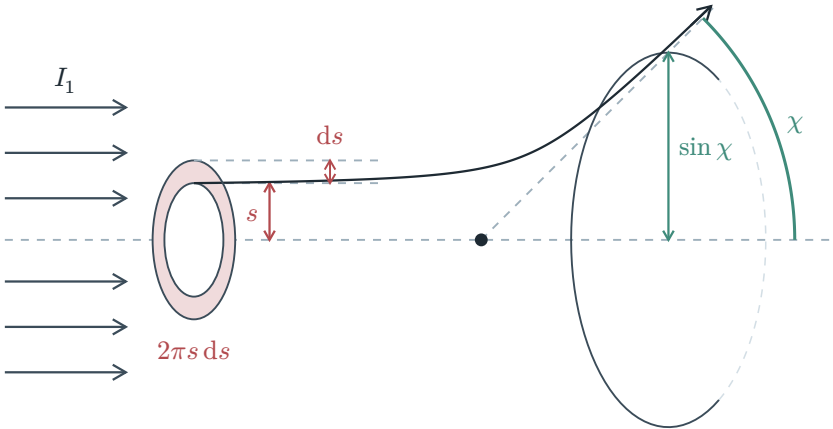
Notar que $\sigma(\chi)$ tiene unidades de área.
Si las partículas *pasan* por esta área se desvían algún ángulo entre χ y $\chi + \mathrm{d}\chi$.

Bueno, acá se pone más difícil así que presten atención

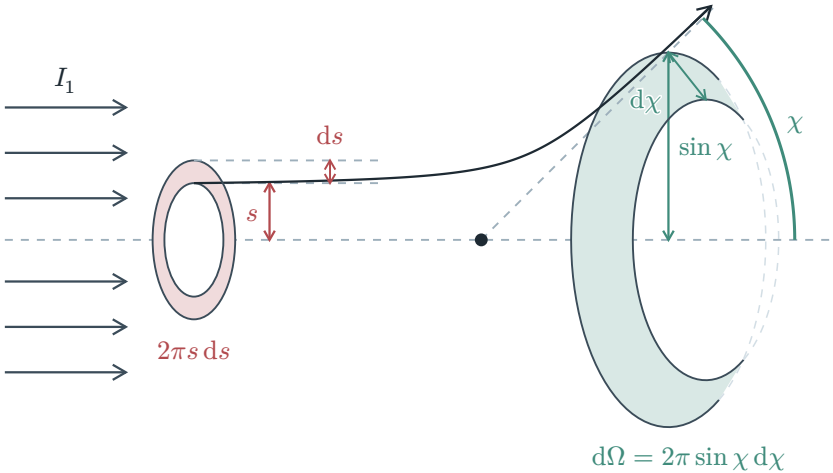
Bueno, acá se pone más difícil así que presten atención



Bueno, acá se pone más difícil así que presten atención



Bueno, acá se pone más difícil así que presten atención



Sección eficaz en función de s

Habíamos dicho que las partículas que salen entre χ y $\chi + \mathrm{d}\chi$ son $\mathrm{d}n_\chi = \sigma(\chi) I_1 \, \mathrm{d}\chi$.

Sección eficaz en función de s

Habíamos dicho que las partículas que salen entre χ y $\chi + \mathrm{d}\chi$ son $\mathrm{d}n_\chi = \sigma(\chi) I_1 \, \mathrm{d}\chi$.

Pero partículas que salen entre χ y $\chi + \mathrm{d}\chi$ son las que entran por el anillo:

$$\mathrm{d}n_\chi = I_1 2\pi s \, \mathrm{d}s \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(\chi) = 2\pi s \left| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi} \right|.$$

Sección eficaz en función de s

Habíamos dicho que las partículas que salen entre χ y $\chi + \mathrm{d}\chi$ son $\mathrm{d}n_\chi = \sigma(\chi) I_1 \, \mathrm{d}\chi$.

Pero partículas que salen entre χ y $\chi + \mathrm{d}\chi$ son las que entran por el anillo:

$$\mathrm{d}n_\chi = I_1 2\pi s \, \mathrm{d}s \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(\chi) = 2\pi s \left| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi} \right|.$$

O las que salen por el anillo,

$$\mathrm{d}n_\chi = I_1 \sigma(\Omega) \, \mathrm{d}\Omega, \quad \mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin(\chi) \, \mathrm{d}\chi \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(\Omega) = \frac{s}{\sin\chi} \left| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi} \right|.$$

Sección eficaz en función de s

Habíamos dicho que las partículas que salen entre χ y $\chi + \mathrm{d}\chi$ son $\mathrm{d}n_\chi = \sigma(\chi) I_1 \, \mathrm{d}\chi$.

Pero partículas que salen entre χ y $\chi + \mathrm{d}\chi$ son las que entran por el anillo:

$$\mathrm{d}n_\chi = I_1 2\pi s \, \mathrm{d}s \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(\chi) = 2\pi s \left| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi} \right|.$$

O las que salen por el anillo,

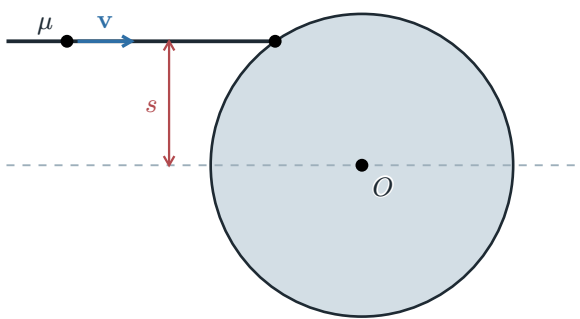
$$\mathrm{d}n_\chi = I_1 \sigma(\Omega) \, \mathrm{d}\Omega, \quad \mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin(\chi) \, \mathrm{d}\chi \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(\Omega) = \frac{s}{\sin\chi} \left| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi} \right|.$$

Sobre un detecto de superficie Γ vamos a medir:

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \int \sigma(\Omega) \, \mathrm{d}\Omega$$

Un ejemplo: esfera rígida

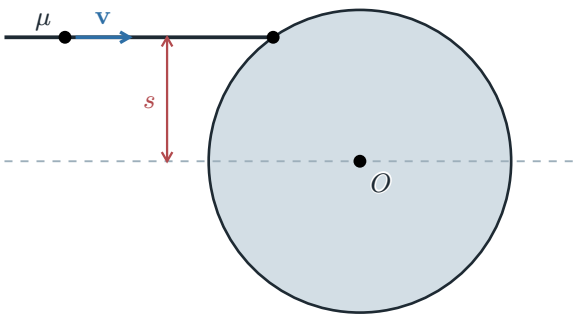
$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$



Un ejemplo: esfera rígida

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

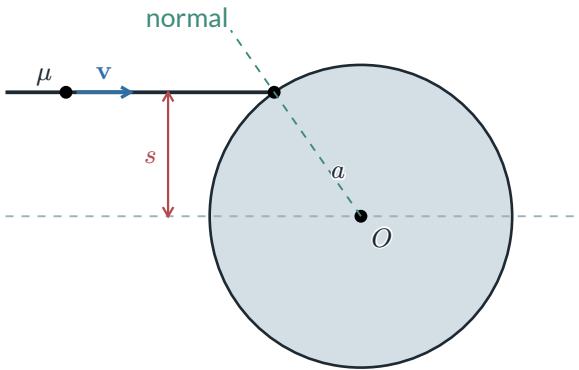
- El golpe es normal y la componente tangencial no cambia.
- La energía no cambia: $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$.



Un ejemplo: esfera rígida

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

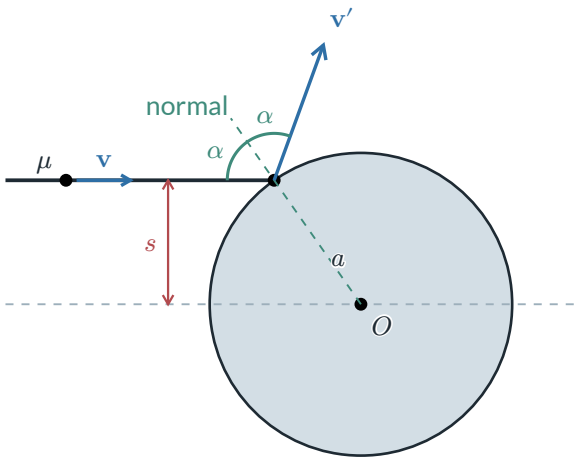
- El golpe es normal y la componente tangencial no cambia.
- La energía no cambia: $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$.



Un ejemplo: esfera rígida

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

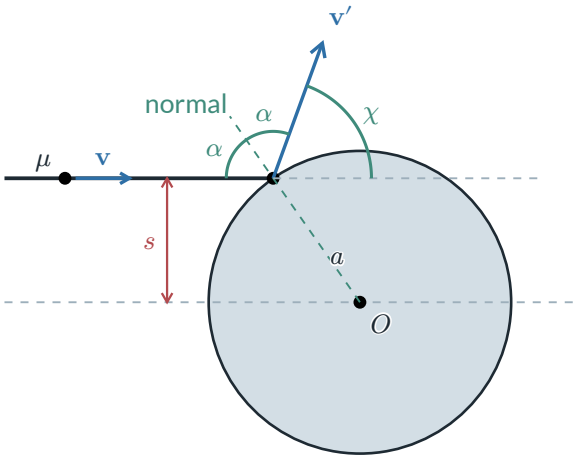
- El golpe es normal y la componente tangencial no cambia.
- La energía no cambia: $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$.



Un ejemplo: esfera rígida

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

- El golpe es normal y la componente tangencial no cambia.
- La energía no cambia: $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$.

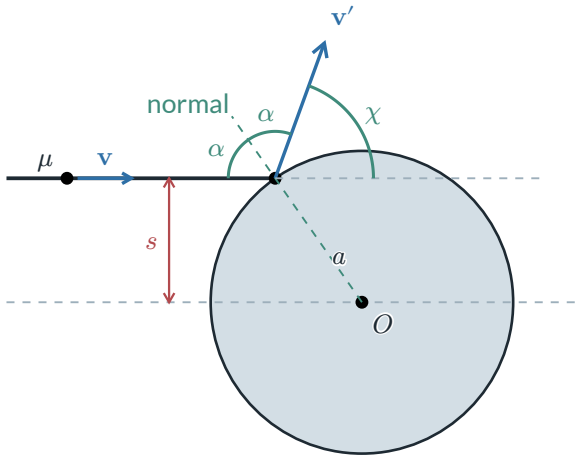


Un ejemplo: esfera rígida

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

- El golpe es normal y la componente tangencial no cambia.
- La energía no cambia: $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$.

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{s}{a}, \quad \chi = \pi - 2\alpha$$



El ángulo de la esfera rígida

Del dibujo:

$$\sin\alpha = \frac{s}{a}, \quad \chi = \pi - 2\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad s = a\cos(\chi/2)$$

El ángulo de la esfera rígida

Del dibujo:

$$\sin\alpha = \frac{s}{a}, \quad \chi = \pi - 2\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad s = a\cos(\chi/2)$$

De la integral podemos llegar a la misma conclusión ($V = 0$ afuera y $r_{\text{mín}} = a$):

$$\chi = \pi - 2\int_a^\infty \frac{s\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1-\frac{s^2}{r^2}}} = \pi - 2\int_0^{s/a} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \pi - 2\arcsin\left(\frac{s}{a}\right)$$

La sección eficaz de la esfera

$$s = a\cos(\chi/2) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi} = -\frac{a}{2}\sin(\chi/2)$$

La sección eficaz de la esfera

$$s = a\cos(\chi/2) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi} = -\frac{a}{2}\sin(\chi/2)$$

$$\sigma(\Omega) = \frac{s}{\sin(\chi)}\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi}\right|$$

La sección eficaz de la esfera

$$s = a\cos(\chi/2) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi} = -\frac{a}{2}\sin(\chi/2)$$

$$\sigma(\Omega) = \frac{s}{\sin(\chi)}\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi}\right| = \frac{a}{2\sin(\chi/2)} \cdot \frac{a}{2}\sin(\chi/2) = \frac{a^2}{4}$$

La sección eficaz de la esfera

$$s = a\cos(\chi/2) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi} = -\frac{a}{2}\sin(\chi/2)$$

$$\sigma(\Omega) = \frac{s}{\sin(\chi)}\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi}\right| = \frac{a}{2\sin(\chi/2)}\cdot\frac{a}{2}\sin(\chi/2) = \frac{a^2}{4}$$

Queda una constante: la dispersión es isótropa en el CM y no depende de la energía.

Sección eficaz total

$$\sigma_{\text{tot}} = \int \frac{a^2}{4}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{a^2}{4} \cdot 4\pi = \pi a^2$$

Sección eficaz total

$$\sigma_{\text{tot}} = \int \frac{a^2}{4}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{a^2}{4} \cdot 4\pi = \pi a^2$$

- Se desvía todo lo que entra por el círculo de radio a.

Sección eficaz total

$$\sigma_{\text{tot}} = \int \frac{a^2}{4}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{a^2}{4} \cdot 4\pi = \pi a^2$$

- Se desvía todo lo que entra por el círculo de radio a.
- Si el potencial tiene alcance infinito*, toda partícula se desvía un poco y σ_{tot} diverge.

Eso es todo.